ADE **Examen y solución** **Matemáticas I**

ÁLGEBRA

1. Estudiar si alguna de las siguientes matrices es Ortogonal, o Simétrica

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2.Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Calcular el determinante de las matrices **3A**; A^{21} y $(A^{21})^{-1}$

3. Una empresa fabrica 3 productos **A, B y C;** para ello utiliza los factores de producción **x, y, z.** El precio de venta de cada unidad de producto es: 200 € para **A**, 150 € para **B**, y 300 € para **C**. Las cantidades que dispone de factores de producción son: 280 unidades del factor x, 460 unidades del factor y, 100 unidades del factor z. El precio de coste de los factores es: 5 €el factor x, 15 €el factor y, 10 €el factor z. La tabla de producción por unidad de producto es:

	x	y	z
A	2	6	8
B	4	11	1
C	8	6	2

Determinar el beneficio total que consigue la venta de la producción obtenida con los recursos de que dispone la empresa.

4. Para qué valores de **a** y **b** la siguiente matriz es diagonalizable:

$A = \begin{pmatrix} 1 & b & a \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

5. Clasificar la forma cuadrática siguiente según los valores del parámetro "a"

$$Q(x,y,z) = x^2 + 2xy + 4xz + 2\boldsymbol{y^2} + 2\boldsymbol{a}yz + z^2$$

Solución

1. Para que sea simétrica A = A^t

A$\neq A^t$ → A no es simétrica

B = B^t → B si es simétrica

C = C^t → C si es simétrica

www.academiaprincipal.com

Ortogonal $\begin{cases} A \times A^t = I \\ A^t \times A = I \end{cases}$ Condición Necesaria de la ortogonal: $|A| = \pm 1$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ = (0+12-12) –(-32-1+0) $\neq$ 1 → **A** No es ortogonal

$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ = 1→ La matriz **B** si cumple la condición necesaria para que sea matriz ortogonal

$B \times B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^t \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ → **B si** es ortogonal

$|C| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ = 2- $\left(4 + \frac{4}{9}\right) \neq \pm 1$ → **C no** es ortogonal

2. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix}$ = $-\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda = \lambda\,(-\lambda^2 + 2\lambda - 2) = 0 \rightarrow \lambda = 0$

$-\lambda^2 + 2\lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{-2}$ **No se pueden calcular** los valores propios (los λ), por lo que no se puede calcular A= P×D× P^{-1} → ni A^n= P× $D^n \times P^{-1} \rightarrow A^{21} = P \times D^{21} \times P^{-1}$

3. P_A= 200 $C_A = 5$
P_B= 150 $C_A = 15$
P_C= 300 $C_C = 10$

$\begin{cases} 2A + 4B + 8C = 280 \\ 6A + 11B + 6C = 460 \\ 8A + 1B + 2C = 100 \end{cases}$ → A=4; B = 29; C = 19,5 (unidades fabricadas y vendidas)

Bº=(200 × 4) + (150 × 29) + (300 × 19,5) - [(5 × 280) + (15 × 460) + (10 × 100)]=**1.700 €**

4. A = $\begin{pmatrix} 1 & b & a \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1-\lambda & b & a \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix}$ = $(1-\lambda)(2-\lambda)(a-\lambda)$= 0

Si a ≠1 y 2 → Si es diagonalizable

Si a = 1 → λ=1 → OM = 2

Diagonalizable: nº de incógnitas – Rg M = OM

$$3 - \begin{cases} 1\ (cuando\ b = 1) = 2\ (el\ OM) \rightarrow Diagonalizable \\ 2\ (cuando\ b \neq 1) \neq 2\ (el\ OM) \rightarrow No\ diagonalizable \end{cases}$$

www.academiaprincipal.com

Si λ =1

$\begin{pmatrix} 1-1 & b & 1 \\ 0 & 2-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ →Rg M ≠3→ $\begin{bmatrix} b & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$= b-1 =0 $\begin{cases} Si\ b = 1 \to Rg\ M = 1 \\ Si\ b \neq 1 \to Rg\ M = 2 \end{cases}$

Si λ=2 → OM =1 → Diagonalizable = nº de incógnitas –Rg M = OM

3 - 2 = 1 → Diagonalizable

$\begin{pmatrix} 1-2 & b & 1 \\ 0 & 2-2 & 1 \\ 0 & 0 & 1-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & b & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ →Rg M ≠3 → $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$= -1≠0→Rg M = 2

Conclusión: si a=1 y b=1 → es diagonalizable

Si a =2→ λ=2 → OM =2

$\begin{pmatrix} 1-\lambda & b & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1-2 & b & 2 \\ 0 & 2-2 & 1 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & b & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ → Rg M ≠3 →

$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$= -1≠ 0 → Rg M =2

Dimensión: nº de incógnitas – Rg M = OM

3 - 2 ≠ 2 → No es diagonalizable

Resumen $\begin{cases} \forall\ a \neq 1\ y\ 2 \ \to es\ diagonalizable \\ si\ a = 1\ y\ b = 1 \ \to es\ diagonalizable \\ si\ a\ a = 2 \to no\ es\ diagonalizable \end{cases}$

5. $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 \\ \mathbf{1} & 2 & a \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$ $H_1 = +1$ $H_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +1$ $H_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix}$ = $-a^2$+4 a-7 = 0→ $\begin{cases} a = -5{,}31 \\ a = 1{,}31 \end{cases}$

	H_1	H_2	H_3	Forma cuadrática
a < -5,31	+	+	+	**Definida positiva**
a = - 5,31	+	+	0	**Semidefinida positiva**
-5,31 < a < 1,31	+	+	-	**Indefinida**
a = 1,31	+	+	0	**Semidefinida positiva**
a > 1,31	+	+	+	**Definida positiva**

www.academiaprincipal.com