DADE **Examen y solución** **Matemáticas I**

ÁLAGEBRA

1. Dada la matriz A, responda a las siguientes cuestiones que se plantean:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Es simétrica? ¿Por qué?

b) ¿Cuál es su rango?

c) ¿Tiene inversa? ¿Por qué?

d) Calcule su traza y diga qué resultado ha obtenido

e) ¿Es ortogonal? ¿Por qué?

f) ¿Es idempotente? ¿Por qué?

2. Calcule, cuando sea preciso, los siguientes determinantes. En caso de no realizar ningún cálculo, explique el resultado.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

3. De una dieta suministrada a peces de agua fría, se consideran únicamente tres alimentos A_1, A_2 y A_3. En dichos alimentos existe un nutriente (N), un protector (P) y un conservante ©. La siguiente tabla muestra las cantidades de N, P y C aportadas por cada alimento.

	N	P	C
A_1	1	2	3
A_2	4	a	6
A_3	5	7	7

Se sabe que estos peces necesitan en su dieta 12 unidades de N, 30 de P y 40 de C. Determinar, en caso de que sea posible, qué cantidad de alimentos puede cubrir las necesidades de los peces.

Solución

1. a) No es simétrica porque $A \neq A^t \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ = 1 ≠0 → Rg M = 3

c) $[A]$= 1 ≠ 0 → Si tiene inversa

d) $(A) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 & -2 \\ -1 & \mathbf{1} & 2 \\ -2 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ → Traza = **2** +**1**+**1** = 4

e) $|A|$= 1

A× A^t = I → $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

Como a_{11}= 9 ≠ 1 → A× A^t ≠ I → A no es ortogonal

f) Idempotente $\begin{cases} A = A^t \rightarrow no\ coinciden \\ A^2 = A\ (como\ la\ condición\ de\ arriba\ no\ se\ cumple\ ya\ no\ comprobamos\ esto) \end{cases}$

Por lo que A no es idempotente.

2. a) $\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 2 & \mathbf{0} & 1 \\ 3 & \mathbf{0} & 1 \end{vmatrix}$ = 0 Al tener una fila o columna de ceros el valor del determinante es cero

b) $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 2 & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{a} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} Si\ a = 1 \rightarrow el\ determinante\ vale\ cero \\ Si\ a \neq 1 \rightarrow el\ determinante\ vale\ diferente\ de\ cero \end{cases}$

c) $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} & 5 \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & 7 \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & 9 \end{vmatrix}$= 0 (1ª + 2ª columna = 3ª columna) La 3ª columna es combinación lineal de las otras dos. Cuando eso ocurre el valor del determinante es cero.

d) $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} & 5 \\ \mathbf{2} & \mathbf{8} & 10 \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & 9 \end{vmatrix}$= 0 (1ª + 2ª columna = 3ª columna) La 3ª columna es combinación lineal de las otras dos. Cuando eso ocurre el valor del determinante es cero.

e) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & \mathbf{2} & 1 & 3 \\ 1 & \mathbf{1} & 2 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 2 & \mathbf{2} & 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \times \mathbf{1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ = - $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ = -3

3. $A_1 = x$ $A_2 = y$ A_3= z

$\begin{cases} 1x + 4y + 5z = 12 \\ 2x + ay + 7z = 30 \\ 3x + 6y + 7z = 40 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & 12 \\ 2 & a & 7 & 30 \\ 3 & 6 & 7 & 40 \end{array}\right)$ $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & a & 7 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ = -8 a+46 = 0 →a = 5,75

Si a ≠ 5,75 → Rg M = 3 = Rg A = 3 = nº de incógnitas →S.C.D.(Sistema Compatible Determinado) →Una única solución

Si a = 5,75 → Rg M = 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & \mathbf{12} \\ 2 & 5{,}75 & 7 & \mathbf{30} \\ 3 & 6 & 7 & \mathbf{40} \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{12} & 5 \\ 2 & \mathbf{30} & 7 \\ 3 & \mathbf{40} & 7 \end{vmatrix} = -36 \rightarrow \text{Rg } A = 3$$

Como a = 5,75 → Rg M = 2 ≠ Rg A = 3→ S. Incompatible→ No tiene solución

Solución del sistema cuando el Sistema es Compatible Determinado → a ≠ 5,75

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{12} & 4 & 5 \\ \mathbf{30} & a & 7 \\ \mathbf{40} & 6 & 7 \end{vmatrix}}{-8a+46} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{12} & 5 \\ 2 & \mathbf{30} & 7 \\ 3 & \mathbf{40} & 7 \end{vmatrix}}{-8a+46} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & \mathbf{12} \\ 2 & a & \mathbf{30} \\ 3 & 6 & \mathbf{40} \end{vmatrix}}{-8a+46}$$