FICO **Examen y solución** **Matemáticas 1º**

ÁLGEBRA

1. Estudiar si alguna de las siguientes matrices es Ortogonal, Idempotente o Simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

2.Sea 2A +3I = B una expresión matricial, donde $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e I la matriz unidad del orden correspondiente. Calcular el determinante de la matriz $(A + 2\,\mathrm{I})^{123}$

3. Un autobús urbano transporta en hora punta 90 viajeros de 3 tipos: viajeros que pagan el billete entero, que vale 1 €; estudiantes que tienen un 25% de descuento al presentar el carnet y jubilados de la localidad que únicamente pagan el 50% del precio del billete. La recaudación del autobús en ese viaje fue de 64 €.
Calcular el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de jubilados era el mismo que el número del resto de viajeros.

4. Para qué valores de **a** y **b** la siguiente matriz es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & b \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

5. Clasificar la forma cuadrática siguiente según los valores del parámetro "a"

$$Q(x,y,z) = x^2 + 4xy + 2xz + 4\boldsymbol{ay^2} + 2\boldsymbol{a}yz + z^2$$

SOLUCIÓN

1. Ortogonal: A× A^t = I (matriz identidad)

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix} \qquad A\times A^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ 5 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+9+25=38 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Como a_{11} = 38 ≠ 1, ya no puede dar la matriz identidad

La matriz identidad es aquella que en la diagonal principal tiene unos y el resto de los valores son ceros.

$$B\times B^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9+1=11 \neq 1 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \rightarrow \text{B no es ortogonal}$$

$$C\times C^t=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=1 & \frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

$$C^t\times C=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

Como $C\times C^t = I$ y $C^t\times C = I$ → C si es matriz ortogonal

Simétrica: si $A = A^t$

$$A\neq A^t\rightarrow\begin{pmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -3 & 4 & -3\\ -5 & 5 & -4\end{pmatrix}\rightarrow \text{A no es simétrica}$$

$$B=B^t\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ -3 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ -3 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\rightarrow \text{B si es simétrica}$$

$$C\neq C^t\rightarrow\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\rightarrow \text{C no es traspuesta}$$

Idempotente $\begin{cases}A = A^t\\ A^2 = A\end{cases}$

A → Si no es simétrica $A\neq A^t$ → No es idempotente

B → $B = B^t$ → si es simétrica

Comprobamos si $B^2 = B$ → $B^2 = B\times B = \begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ -3 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ -3 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

Como a_{11}= 11 ≠ 1 entonces el resultado de la multiplicación no puede dar "B" y por lo tanto no es idempotente

C→ como $C\neq C^t$ → no es simétrica y no es idempotente.

2. $2A + 3I = B \rightarrow 2A = B - 3I \rightarrow A = \frac{B-3I}{2} = \frac{1}{2}(B - 3I)$

$$A=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}5 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$C=(A+2I)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$|C-\lambda I|=0\rightarrow\begin{vmatrix}3-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 0-\lambda & 0\\ 2 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+4\lambda^2-1$$

No se puede descomponer por Ruffini la función en los valores de λ, y por lo tanto no se puede calcular $(A+2I)^n = P\times D^n\times P^{-1}$ porque no se pueden calcular los vectores propios (para ello necesitamos los valores de λ).

3. x → billete entero → precio 1 €

y → billete estudiantes → 0,75 €

z → billete jubilado → 0,50 €

$$\begin{cases} x+y+z=90 \\ 1x+0{,}75y+0{,}50z=64 \\ x+y=z \end{cases} \rightarrow$$ **x=31; y = 14; z = 45**

4. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & b \\ 2 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(\lambda^2-9) \rightarrow$ λ= a; λ = ± 3

Si a ≠ ± 3 → siempre es diagonalizable

Si a = 3 → $\begin{cases} \lambda = 3 \ \rightarrow OM = 2 \\ \lambda = -3 \ \rightarrow OM = 1 \end{cases}$

Si a = -3 → $\begin{cases} \lambda = -3 \ \rightarrow OM = 2 \\ \lambda = 3 \ \rightarrow OM = 1 \end{cases}$

Si a = 3 λ= 3→ OM = 2

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 4 & b \\ 2 & -1-3 & 1 \\ 0 & 0 & 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & b \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para que sea diagonalizable: Dimensión = nº de incógnitas – Rango = OM

$$3 - \begin{cases} 1\ (si\ \boldsymbol{b=-1}) = 2 \ \rightarrow \boldsymbol{Si\ es\ diagonalizable} \\ 2\ (si\ \boldsymbol{b \neq -1}) = 1 \ \rightarrow \boldsymbol{no\ es\ diagonalizable} \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} -2 & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ = -2-(2b) = 0 → b = -1 → Si b = -1→ Rg M = 1 → Si b ≠-1 → Rg M = 2

$\begin{vmatrix} 4 & b \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$ = 4 – (-4b) = 0 → b = -1

Si **λ = -3** → OM = 1

$$\begin{pmatrix} 1-(-3) & 4 & b \\ 2 & -1-(-3) & 1 \\ 0 & 0 & 3-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & b \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Dimensión = nº de incógnitas – Rango = OM

3 – 2 = 1 = OM → Diagonalizable

$\begin{vmatrix} 4 & 4 & b \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ = 0 → Rg M ≠3 → $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$ = 12 ≠0 → Rg M = 2

<u>Conclusión</u>: si **a = 3 y b = -1 → es diagonalizable**

Si a = -3 → λ = -3 → OM = 2

$$\begin{pmatrix} 1-(-3) & 4 & b \\ 2 & -1-(-3) & 1 \\ 0 & 0 & 3-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & b \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Dimensión = nº de incógnitas – Rango = OM

3 – 2 ≠ 2 = OM → **No es diagonalizable para a = -3**

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$= 12 ≠ 0 → Rg M = 2

5.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4a & 2a \\ 1 & 2a & 1 \end{pmatrix}$ H_1= +1 H_2= $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4a \end{vmatrix}$= 4 a -4 = 0 → a = +1 H_3 = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4a & 2a \\ 1 & 2a & 1 \end{vmatrix}$= 4($-a^2 + 2a - 1$) = 0

$-a^2$+2 a -1 = 0 → a = +1

Solución	H_1	H_2	H_3	Forma cuadrática
a< 1	+	-	-	Indefinida
a = 1	+	0	0	Semidefinida positiva
a > 1	+	+	-	Indefinida